

第十一章 无穷级数

数项级数的概念及其敛散性的判别

同步练习

11.1.一

1. 当 p 满足_____时,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p+1}}$ 收敛.

解 $p > 1$, p -级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 收敛, $p \leq 1$, p -级数发散.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p+1}} \text{ 收敛, } p > 0$$

11.1.一

2. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n+1}$ 是_____ (填收敛或发散)

解 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n n}{n+1}$ 不存在, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n+1}$ 发散.

11.1.一

3. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$ 是 _____ (填绝对收敛或条件收敛)

解 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散,

因此 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散.

而 $u_n = \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$ 单调递减 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$,

因此 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$ 条件收敛.

11.1.一

4. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ 是 _____ (填绝对收敛或条件收敛)

解 由于 $\left| \frac{(-1)^n}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛,

因此 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ 绝对收敛.

11.1.一

5. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{100}{n(n+1)} - \frac{100}{3^n})$ 的和 $S =$ _____

解 $u_n = \frac{100}{n(n+1)} = 100(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$

$$K_n = \sum_{i=1}^n u_i = 100(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \Lambda + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$$

$$= 100(\frac{1}{1} - \frac{1}{n+1})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100}{n(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} K_n = 100$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100}{3^n} = \frac{\frac{100}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = 50$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{100}{n(n+1)} - \frac{100}{3^n}) = S$$

$$= 100 - 50 = 50$$

11.1.二

1. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和 $S_n = \frac{3^n - 1}{3^{n-1}}$, (1). 求 u_n

(2). 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的敛散性, 若其收敛求其和

解 (1) $u_n = S_n - S_{n-1} = \frac{3^n - 1}{3^{n-1}} - \frac{3^{n-1} - 1}{3^{n-2}} = \frac{1}{3^{n-1}} [3^n - 1 - (3^n - 3)]$
$$= \frac{2}{3^{n-1}}$$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 1}{3^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{1}{3^{n-1}}\right) = 3$

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是收敛的.

且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = 3$

11.1.二

2. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{3n-1}$ 的敛散性.

解 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n n}{3n-1}$ 不存在, 因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{3n-1}$ 发散.

11.1.二

3. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n-4)(5n+1)}$ 的敛散性,若收敛求其和.

解 $u_n = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{5n-4} - \frac{1}{5n+1} \right)$

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^n u_i = \frac{1}{5} \cdot \left[\left(1 - \frac{1}{6} \right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{11} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{5n-4} - \frac{1}{5n+1} \right) \right] \\ &= \frac{1}{5} \cdot \left(1 - \frac{1}{5n+1} \right) \end{aligned}$$

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{5}$, 因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n-4)(5n+1)}$ 收敛,

$$\text{且 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n-4)(5n+1)} = \frac{1}{5}.$$

11.1.二

4. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}$ ($a > 0$) 的敛散性.

解 $u_n = \frac{1}{1+a^n}, (a > 0)$

$0 < a < 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+a^n} = 1 \neq 0$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}$ 发散.

$a = 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \neq 0$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}$ 发散.

$a > 1$ 时, $0 < u_n = \frac{1}{1+a^n} < \frac{1}{a^n}$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n}$ 收敛,

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}$ 收敛.

11.1.二

5. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{a^n n!}$ ($a > 0, a \neq e$) 的敛散性.

解 $a > 0, a \neq e, u_n = \frac{n^n}{a^n n!} > 0,$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{a^{n+1} (n+1)!}}{\frac{n^n}{a^n n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{a}$$

$0 < a < e$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{a^n n!}$ 发散.

$a > e$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{a^n n!}$ 收敛.

11.1.二

6. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \arcsin \frac{1}{n}$ 的敛散性,

如果收敛, 则是绝对收敛还是条件收敛.

解 $u_n = \arcsin \frac{1}{n} > 0,$

显然 $u_n = \arcsin \frac{1}{n}$ 单调递减, $\lim_{n \rightarrow \infty} \arcsin \frac{1}{n} = 0,$

因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \arcsin \frac{1}{n}$ 收敛.

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arcsin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1,$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 因此 $\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{1}{n}$ 发散.

因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \arcsin \frac{1}{n}$ 条件收敛.

11.1.二

7. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^3}{2^n}$ 的敛散性,

如果收敛, 则是绝对收敛还是条件收敛.

解 $u_n = \frac{n^3}{2^n} > 0,$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3}{\frac{2^{n+1}}{\frac{n^3}{2^n}}} = \frac{1}{2} < 1.$$

因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{2^n}$ 绝对收敛.

11.1.二

8. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot \Lambda \cdot (3n-1)}{1 \cdot 5 \cdot \Lambda \cdot (4n-3)}$ 的敛散性.

解 $u_n = \frac{2 \cdot 5 \cdot \Lambda \cdot (3n-1)}{1 \cdot 5 \cdot \Lambda \cdot (4n-3)} > 0,$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2 \cdot 5 \cdot \Lambda \cdot (3n-1)(3n+2)}{1 \cdot 5 \cdot \Lambda \cdot (4n-3)(4n+1)}}{\frac{2 \cdot 5 \cdot \Lambda \cdot (3n-1)}{1 \cdot 5 \cdot \Lambda \cdot (4n-3)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+2}{4n+1} \\ &= \frac{3}{4} < 1. \end{aligned}$$

因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot \Lambda \cdot (3n-1)}{1 \cdot 5 \cdot \Lambda \cdot (4n-3)}$ 收敛.

11.1.二

9. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n^{n+1}}$ 的敛散性.

解 $u_n = \frac{(n+1)!}{n^{n+1}} > 0,$

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+2)!}{(n+1)^{n+2}}}{\frac{(n+1)!}{n^{n+1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{(n+1)^{n+2}} \cdot \frac{n^{n+1}}{1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{(n+1)(1+\frac{1}{n})^{n+1}} = \frac{1}{e} < 1.\end{aligned}$$

因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n^{n+1}}$ 收敛.

11.1.二

10. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$ 的敛散性,若收敛求其和

解 $u_n = \frac{n}{(n+1)!} = \frac{n+1-1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$

$$S_n = \sum_{i=1}^n u_i = \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \Lambda + \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{1!} - \frac{1}{(n+1)!}$$

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$,

因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$ 收敛,

$$\text{且} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} = 1.$$

11.1.二

11. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(\frac{n+1}{n})^{n^2}}$ 的敛散性.

解 $u_n = \frac{3^n}{(\frac{n+1}{n})^{n^2}} > 0,$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{3^n}{(\frac{n+1}{n})^{n^2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{(\frac{n+1}{n})^n} = \frac{3}{e} > 1.$$

因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(\frac{n+1}{n})^{n^2}}$ 发散.

11.1.二

12. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n (u_n > 0)$ 的部分和 S_n , 记 $v_n = \frac{1}{S_n}$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的敛散性.

解 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0$,

$$v_n = \frac{1}{S_n}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{S_n} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty,$$

因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

11.1.二

13. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 1}{n}$ 的敛散性.

解 $u_n = \frac{\sin 1}{n} > 0$, 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散,

因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 1}{n}$ 发散.

11.1.二

14. 设正项数列 $\{a_n\}$ 单调减少, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 发散,

判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+a_n}\right)^n$ 敛散性.

解 数列 $\{a_n\}$ 单调减少, $\{a_n\}$ 有界, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$,

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 发散, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a > 0$, 且 $a_n > a > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{1+a_n}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+a_n} = \frac{1}{1+a} < 1$$

因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+a_n}\right)^n$ 收敛.

或 $\exists N, n > N$ 时, $a_n > \frac{a}{2} > 0$, $0 < \frac{1}{1+a_n} < \frac{1}{1+a} = r < 1$

$\left(\frac{1}{1+a_n}\right)^n \leq \left(\frac{1}{1+a}\right)^n = r^n$, 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ 收敛,

11.1.二

15. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1!)^2 + (2!)^2 + \Lambda + (n!)^2}{(2n)!}$ 的敛散性.

解 $u_n = \frac{(1!)^2 + (2!)^2 + \Lambda + (n!)^2}{(2n)!} > 0,$

$$\frac{(1!)^2 + (2!)^2 + \Lambda + (n!)^2}{(2n)!} < \frac{n(n!)^2}{(2n)!} = v_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)[(n+1)!]^2}{(2n+2)!}}{\frac{n(n!)^2}{(2n)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)n} = \frac{1}{4} < 1.$$

因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

11.1.三

1. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ 收敛.

证 由于 $\left| \frac{a_n}{n} \right| \leq \frac{1}{2} \left(a_n^2 + \frac{1}{n^2} \right),$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{a_n}{n} \right|$ 收敛.

因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ 收敛.

11.1.三

2. 设 $a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{a_n}), (n = 1, 2, \Lambda)$, 证明:

(1). $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在, (2) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1)$ 收敛.

证 (1) $a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{a_n}), a_2 = \frac{1}{2}(2 + \frac{1}{2}) = \frac{5}{4} \in (1, 2),$

假设 $a_{k+1} = \frac{1}{2}(a_k + \frac{1}{a_k}) \in [1, 2],$ 则 $a_{k+2} = \frac{1}{2}(a_{k+1} + \frac{1}{a_{k+1}}) \geq 1,$

$a_{k+2} = \frac{1}{2}(a_{k+1} + \frac{1}{a_{k+1}}) \leq \frac{1}{2}(2 + 1) < 2,$ 因此 $a_n \in [1, 2], \frac{1}{a_n} \in [\frac{1}{2}, 1].$

由于 $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{a_n}) - a_n = \frac{1}{2}(\frac{1}{a_n} - a_n) \leq 0$

数列 $\{a_n\}$ 单调递减有界, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1.$

11.1.三

2. 设 $a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{a_n}), (n = 1, 2, \Lambda)$, 证明:

(1). $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在, (2) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1)$ 收敛.

证 (1) $a_n \leq a_{n+1} \in [1, 2], \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1.$

$$(2) \quad 0 < u_n = \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 = \frac{a_n - a_{n+1}}{a_{n+1}} < a_n - a_{n+1} = v_n$$

$$\text{而 } K_n = \sum_{i=1}^n v_i = a_1 - a_2 + \Lambda + a_n - a_{n+1} = a_1 - a_{n+1}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} K_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 - a_{n+1}) = 2 - 1 = 1$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛.

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1)$ 收敛.